Логический анализ алгоритма метода конечных элементов для геометрической нелинейности на основе метода маркировки переменных

Ло Чжэнь
аспирант кафедры строительных конструкций, зданий и сооружений, Дальневосточный федеральный университет, lo.ch@dvfu.ru

С помощью линейной дискретизации определяющих соотношений, разделения упругих и пластических деформаций, определения режимов нагружения и разгрузки, стратегии обновления матриц и обработки контакта при разрушении материала была усовершенствована логика алгоритма метода маркировки переменных. Это позволило универсальному конечно-элементному программному комплексу ZQFEM выполнять высокоточное моделирование сложных моделей, включая модели с нелинейностью материала. Построение логики алгоритма и анализ тестовых примеров показали следующее. Когда координаты узлов не зависят от деформаций и перемещений конструкции, для определения кривой определяющих соотношений материала необходимо использовать инженерные напряжения и инженерные деформации. При моделировании истории нагружения для линейно дискретизированных нелинейных определяющих соотношений материала итерационные методы, такие как метод Ньютона-Рафсона, сводят систему уравнений с переменными коэффициентами к обычной системе линейных уравнений. По сравнению с разрушением узлов разрушение элементов не рекомендуется применять при моделировании развития трещин, поскольку численные решения, например деформации, имеют скачкообразные разрывы. Результаты исследования показывают, что метод маркировки переменных надёжен в области нелинейности материала и может удовлетворить потребности моделирования определяющих соотношений сложных материалов.

Ключевые слова: Нелинейность материала, метод маркировки переменных, разупрочнение и разгрузка, пластический шарнир, распространение трещин, ZQFEM.

Введение

В конечно-элементном анализе решение систем алгебраических уравнений с переменными коэффициентами составляет основу при рассмотрении нелинейности материала, контактной и геометрической нелинейности. Для нелинейных материалов сложная зависимость между напряжением и деформацией, а также влияние истории нагружения и внешней среды значительно повышают вычислительную сложность. Современные исследования развиваются в двух основных направлениях. Первое связано с точным описанием определяющих соотношений и моделированием нагружения, разгрузки, разупрочнения, упрочнения и пластического разрушения. Второе направлено на совершенствование численных алгоритмов, например инкрементально-итерационных методов Ньютона-Рафсона и квазиньютоновских методов, в сочетании с пространством напряжений или деформаций, с использованием критериев перемещений, невязки, энергии и относительного приращения перемещений для контроля сходимости и точности.

Из-за свойства «единственного нуля» метод Ньютона-Рафсона вблизи точек экстремума склонен к зацикливанию, что затрудняет моделирование разупрочнения и разгрузки. При силовом нагружении в случае вырождения матрицы Якоби невозможно различить точки бифуркации и точки поворота; применение нагружения по перемещениям или метода длины дуги позволяет эффективно преодолеть точки экстремума. Этого также можно достичь с помощью управления ASP/GSP и комбинированной стратегии нагрузки и длины дуги [5]. Моделирование разрушения материала в основном включает четыре метода: точечное разрушение (например, пластический шарнир, трещины), разрушение элемента (метод «рождения и смерти» элементов, например раздавливание бетона), анизотропные континуальные элементы и редуцирование параметров. Среди них точечное разрушение и разрушение элемента подтверждены как наиболее надёжные, а последние два представляют собой лишь приближённые расчёты и имеют низкую универсальность.

Итак, опираясь на результаты исследований указанных выше учёных, автор с помощью самостоятельно разработанного универсального конечно-элементного программного комплекса ZQFEM[9] (Ziqiang FEM, «Цзыцян») провёл исследование логики алгоритмов для моделирования нелинейности материала, пластических шарниров и трещин. Результаты численных расчётов показали, что ZQFEM позволяет описывать кривые инженерных напряжений и деформаций, совместно учитывать участки разупрочнения и разгрузки, моделировать такие формы разрушения, как пластические шарниры и распространение трещин; результаты расчётов также надёжны. Результаты исследования имеют важное справочное значение для применения различных коммерческих программных комплексов и самостоятельной разработки конечно-элементных программ [15].

Краткое введение в метод маркировки переменных

В рамках объектно-ориентированной общей архитектуры ZQFEM метод маркировки переменных является алгоритмом передачи и обработки данных различных объектов (узловых объектов, объектов сечений, объектов элементов, объектов изменений, объектов результатов и т.д.[3]). Он главным образом служит для управления выполнением перехода «единая матрица → общая матрица → разрешающая матрица», то есть для преобразования формулы (1) в формулу (2). Первоначально метод маркировки переменных вводил граничные условия путём модификации «нумерации»[3], позднее распознавание связей сопряжения выполнялось за счёт добавления меток соотношений равенства и введения теоремы передачи нагрузки абсолютно твёрдого тела[2, 3], а затем распознавание контакта и соударения точек, линий, поверхностей и объёмов осуществлялось путём добавления меток линейных зависимостей и введения принципа виртуальных работ при неполном взаимно однозначном соответствии узлов или степеней свободы[2]. В рассматриваемых в данной работе расчётах нелинейности материала в ZQFEM метод маркировки переменных посредством маркировки упругопластического состояния, состояния текучести, состояния нагружения/разгрузки и состояния разрушения материала позволяет в течение всего процесса динамически оценивать и выполнять изменение физико-механических параметров материала, перенумерацию степеней свободы, обновление матриц и т.д., обеспечивая моделирование сложного нелинейного поведения материала под нагрузкой. На рисунке 1 представлена блок-схема логики этого алгоритма. На рисунке 1 метод маркировки переменных перед созданием матриц выполняет сортировку «всех степеней свободы[2, 3]» и «эффективных степеней свободы[2-3]», получая соответственно «порядковые номера» и «номера[2-3]» степеней свободы.

$$M^a \Delta^a + C^a \Delta^a + K^a \Delta^a = F^a \quad (1)$$

$$M^s \Delta^s + C^s \Delta^s + K^s \Delta^s = F^s \quad (2)$$

В формулах (1) и (2): M^a и M^s, C^a и C^s, K^a и K^s, F^a и F^s представляют собой матрицы масс, демпфирования, жёсткости, нагрузок, ускорений, скоростей и перемещений конструкции; верхний индекс «a» обозначает общую матрицу, включающую «все степени свободы» конструкции; верхний индекс «s» обозначает разрешающую матрицу, включающую все «эффективные степени свободы» конструкции [4].

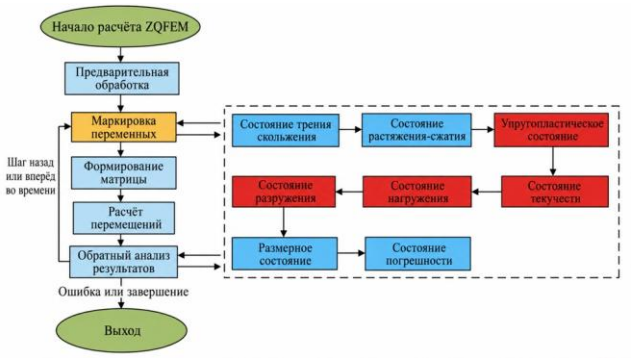


Рис. 1. Схема алгоритма работы ZQFEM при нелинейности материала.

Нелинейность материала

Линейная дискретизация интервалов зависимости напряжения от деформации. На основе исследований Гао Чанхуа и др. [12] известно, что конечно-элементные программные комплексы для моделирования произвольных сложных определяющих соотношений вводят кривую зависимости напряжения от деформации не в виде «функции», а задают её в форме «характерных дискретных точек» (например, в таких коммерческих программных комплексах, как Abaqus). Поэтому, опираясь на обобщение определяющих соотношений различных материалов, приведённое в литературе [1,5-11], ZQFEM, исходя из пространства деформаций и идеи математического анализа «замены кривой прямыми», разделяет материал на четыре участка, каждый из которых затем разбивается на несколько линейных подынтервалов. Для простоты предположим, что каждый участок содержит только один подынтервал; в качестве независимой и зависимой переменных соответственно используются полная деформация по Мизесу ε и полное напряжение по Мизесу σ (инженерное напряжение и инженерная деформация, также называемые номинальным напряжением и номинальной деформацией) (кривая определяющих соотношений также может быть задана с помощью теорий или параметров Треска, девиаторного тензора, Дункана-Чанга и других), в результате чего формируется график зависимости напряжения от деформации [3].

Разделение упругой и пластической деформаций и определение нагружения и разгрузки. В ZQFEM для различных типов элементов, таких как стержневые элементы (также называемые линейными элементами), пластинчатые и оболочечные элементы (также называемые поверхностными элементами), объёмные элементы (также называемые телесными элементами), задаётся единая форма матрицы определяющих соотношений D, описывающая зависимость напряжения от деформации. Когда требуется моделировать поведение при истории нагружения для линейно дискретизированного выражения кривой определяющих соотношений, применяемый метод Ньютона-Рафсона приводит систему уравнений с переменными коэффициентами к вырождению в обычную систему линейных уравнений, из-за чего метод Ньютона-Рафсона не имеет преимуществ в расчётах нелинейности материала. Поэтому в ZQFEM при решении по перемещениям, показанном на рисунке 1, с помощью маркировки времени выполняется метод приращения нагрузки в статике, используется функция numpy.linalg.solve языка Python для непосредственного вычисления приращений перемещений, а по знаку приращения полной деформации dε определяется состояние нагружения или разгрузки конструкции, и в итоге моделируется поведение при нагружении и разгрузке [14].

Разрушение материала.

В режиме «разрушение узла» ZQFEM выполняет независимый анализ всех узлов, которые могут разрушиться и задаются извне. Если «узел, который может разрушиться» связан по крайней мере с двумя элементами, программа создаёт новый объект узла (рис. 2), заменяет вектор локализации этого элемента и далее с помощью функции «связывание точечных областей» из контактной нелинейности, описанной в литературе [2], для степеней свободы, соответствующих различным направлениям двух узлов до и после замены, по отдельности устанавливает линейные зависимости.

(2) При «разрушении элемента» ZQFEM помечает состояние «жив» или «мёртв» для всех элементов, которые могут разрушиться (задаваемых извне), и находит все «свободные узлы» (не имеющие связей с другими элементами), относящиеся к этому элементу. Когда целевые значения элемента (напряжения и деформации по Мизесу, напряжения и деформации по Треска, внутренние силы и т.д.) превышают допустимые значения или пороговые значения, программа в маркировке переменных на рисунке 1 удаляет все степени свободы всех «свободных узлов», связанных с этим элементом, игнорирует вклад «матрицы элемента» этого элемента в «разрешающую матрицу» и изменяет количество и нумерацию эффективных степеней свободы конструкции на данный момент времени, в итоге реализуя динамическое изменение.

Моделирование кривой зависимости напряжения от деформации

Выполняется анализ 3D статической консольной балки, показанной на рис. 3. Номера узлов указаны на рисунке 3. Длина балки L = 1 м. Модель содержит всего 2 узла и 1 элемент Bm_ZY. В узле 1 ограничены все степени свободы. В узле 2 заданы три общих случая нагружения [3], в каждом из них прикладывается сосредоточенная сила F или сосредоточенное перемещение Δ в направлении X глобальной системы координат. Для моделирования поведения при нагружении и разгрузке в случае 1 постепенно прикладывается положительная нагрузка F = 0,08 Н и отрицательная нагрузка F = −0,12 Н; в случае 2 постепенно прикладывается положительное перемещение Δ = 0,32 м и отрицательное перемещение Δ = −0,32 м; в случае 3 постепенно прикладывается положительная нагрузка F = 0,025 Н и отрицательная нагрузка F = −0,025 Н.

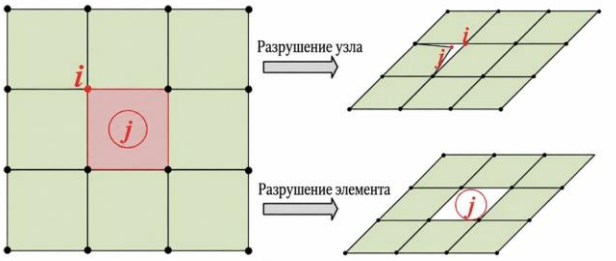


Рис. 2. Схема разрушения модели конечных элементов.

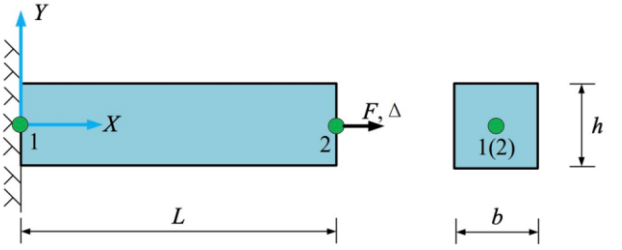


Рис. 3. Консольная балка

Из рисунка 4 видно, что при нагружении силой и перемещением полное напряжение и полная деформация являются линейными функциями времени. В случае 1 (случае 2), когда момент времени приближается к 0,02 с (0,02 с), 0,028 с (0,03 с), 0,046 с (0,06 с), 0,062 с (0,1 с), ZQFEM путём повторяющегося продвижения и возврата по времени постепенно приближает полную деформацию к концам соответствующего подынтервала, в результате при переходе через подынтервал относительная погрешность обоих значений оказывается меньше 0,1 %. Когда координаты узлов не зависят от перемещений и деформаций конструкции, независимо от величины деформации, кривая определяющих соотношений, заданная через инженерное напряжение и инженерную деформацию, является надёжной и позволяет выполнять конечно-элементный анализ моделей нелинейности материала с высокой точностью.

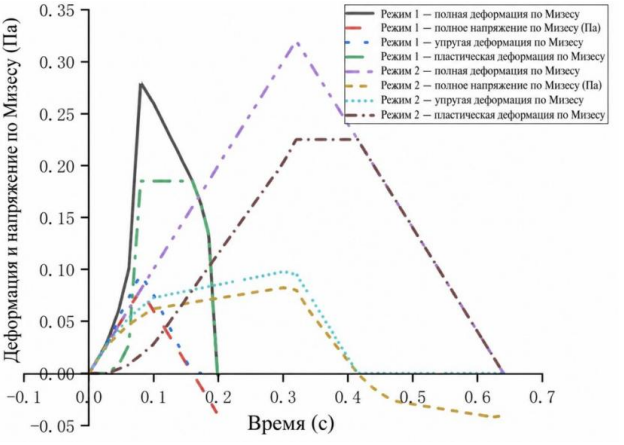


Рис. 4. График изменения напряжения и деформации во времени

Моделирование распространения трещин.

Для анализа распространения трещин используется 2D статическая балочная конструкция, показанная на рисунке 5. Номера и координаты узлов, а также номера элементов указаны на рисунке 5. Длина балки L = 2 м, высота h = 1 м. Изначально модель содержит 28 узлов и 18 элементов Sh_Q4KI. В узлах с 1 по 4 и с 25 по 28 ограничены все степени свободы. В общем узле 16 элементов 9 и 12 прикладывается сосредоточенная сила F в направлении Y глобальной системы координат. Для моделирования распространения трещины допустим, что в общем узле 13 элементов 7 и 10 имеется «разрушение узла», при этом пороговое значение разрушения узла для всех степеней сво-

боды задаётся равным 0,03. Для обоих элементов имеется «разрушение элемента», пороговое значение разрушения элемента задаётся равным 0,3. Пороговые значения разрушения для степеней свободы остальных узлов и разрушения остальных элементов задаются равными бесконечности.

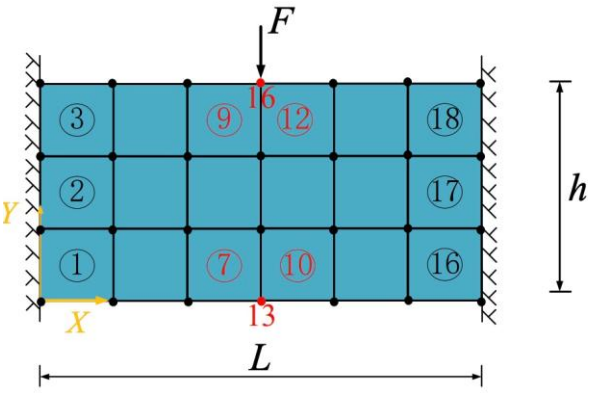


Рис. 5. Балка с защемлёнными концами

При анализе конструкции, показанной на рисунке 5, в ZQFEM добавляется новый узел 29 (раздел 2.3), а узел 13 элемента 7 заменяется на узел 29. Далее между узлами 13 и 29 устанавливается «связывание точечных областей». Из графика изменения во времени на рис. 16 видно, что до момента времени 0,205 с в конструкции отсутствуют разрушение узлов и разрушение элементов, поэтому, как показано на рис. 13, трещина не образуется. В момент времени 0,205 с полная деформация узлов 13 и 29 впервые превышает пороговое значение 0,03, что приводит к потере работоспособности связывания точечных областей между узлами 13 и 29. Элементы 7 и 10 теряют связь в узлах 13 и 29, возникает трещина, и по мере постепенного накопления нагрузки угол раскрытия трещины увеличивается. В момент времени 1,576 с, поскольку полная деформация элементов 7 и 10 превышает пороговое значение 0,3, оба элемента исключаются, в результате чего элементы 9 и 12 перестают участвовать в силовом анализе конструкции.

По сравнению с конечно-элементной моделью без разрушения относительная погрешность перемещения узла 16 в направлении Y изменяется по траектории 0 % (0 с ~ 0,205 с) → 4,426 % (1,576 с) → 5,343 % (2,000 с); относительная погрешность полной деформации узла 13 изменяется по траектории 0 % (0 с ~ 0,205 с) → −166,667 % (1,576 с) → −265,650 % (2,000 с); относительная погрешность полной деформации узла 14 изменяется по траектории 0 % (0 с ~ 0,205 с) → −31,121 % (1,576 с) → 5,642 % (2,000 с), причём в момент 1,576 с из-за исключения элементов 7 и 10 в сглаженной деформации возникает скачкообразный разрыв; относительная погрешность полной деформации узла 16 изменяется по траектории 0 % (0 с ~ 0,205 с) → 0,189 % (1,576 с) → −0,154 % (2,000 с).

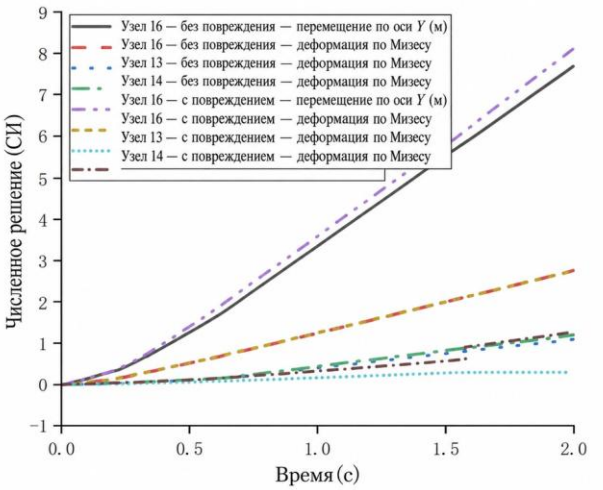


Рис. 6. График изменения численного решения во времени

Таким образом, результаты расчёта, представленные на рис. 6, показывают: трещина в конструкции приводит к увеличению перемещений конструкции, а поскольку перемещения и деформации высвобождаются, численное решение полной деформации в зоне трещины заметно снижается; однако в точках, удалённых от трещины, влияние трещины на численное решение полной деформации постепенно ослабевает. Хотя и разрушение узлов, и разрушение элементов позволяют моделировать распространение трещины, разрушение элементов приводит к скачкообразному разрыву полной деформации и обладает более низкой непрерывностью, поэтому разрушение узлов показывает лучшие результаты. Определённый в разделе 2.3 метод маркировки переменных обеспечивает выполнение конечно-элементного анализа моделей распространения трещин с высокой точностью.

Заключение

На основе самостоятельно разработанного универсального конечно-элементного программного комплекса ZQFEM автор за счёт линейной дискретизации кривой зависимости напряжения от деформации, методов расчёта упругих и пластических деформаций, а также совершенствования логики алгоритмов нагружения, разгрузки и разрушения материала восполнил пробел в расчётах ZQFEM в области нелинейности материала и получил следующие выводы.

(1) Вследствие линейной дискретизации определяющих соотношений конечно-элементной модели при моделировании истории нагружения дискретные уравнения вырождаются в обычную систему линейных уравнений, из-за чего такие нелинейные алгоритмы, как метод Ньютона-Рафсона, не имеют преимуществ в расчётах.

(2) Когда координаты узлов не зависят от перемещений и деформаций конструкции либо когда отключены такие функции, как большие деформации и геометрическая нелинейность, независимо от величины деформации для задания и ввода определяющих соотношений материала следует использовать инженерное напряжение и инженерную деформацию.

(3) После появления в конструкции пластических шарниров силовая система конструкции изменяется, что значительно повышает пластичность и сейсмостойкость таких конструкций, как мостовые опоры. Кроме того, расчётная модель на основе балочного элемента Эйлера-Бернулли приводит к наличию предельного значения изгибающего момента в пластическом шарнире.

(4) Трещины в конструкции приводят к увеличению перемещений конструкции, а поскольку перемещения и деформации высвобождаются, численное решение полной деформации в зоне трещины заметно снижается. Однако в точках, удалённых от трещины, влияние трещины на численное решение полной деформации постепенно ослабевает. Поскольку разрушение элементов вызывает скачкообразный разрыв напряжений и деформаций, для моделирования распространения трещин рекомендуется применять разрушение узлов.

Хотя в ZQFEM реализована функция анализа нелинейности материала, благодаря чему логика алгоритма нелинейности материала на основе маркировки переменных обладает возможностями конечно-элементного анализа высокоточных моделей нелинейности материала, а также моделей разрушения узлов и элементов, таких как пластические шарниры и трещины, этот алгоритм всё ещё нуждается в постоянном совершенствовании на практике. Поэтому внедрение различных сложных поверхностей текучести и определяющих соотношений при нагружении и разгрузке, совершенствование логики алгоритма геометрической нелинейности, а также всесторонняя проверка и доработка функций на основе экспериментальных данных являются основной задачей дальнейшей работы автора.

Литература

1. Абель Дж. Ф., Шепард М. С. Алгоритм для многоточечных ограничений в конечно-элементном анализе // Международный журнал численных методов в инженерии. 1979. Т. 14, № 3. С. 464–467. DOI: 10.1002/nme.1620140312.
2. Бате К.-Дж. Процедуры метода конечных элементов. 2-е изд. Уотертаун, Массачусетс: K. J. Bathe, 2014. 1043 с. ISBN 978-0-9790049-5-7.
3. Белычко Т., Лю В. К., Моран Б., Эльходари К. Нелинейные конечные элементы для сплошных сред и конструкций. 2-е изд. Чичестер: John Wiley & Sons, 2014. 832 с. ISBN 978-1-118-63270-3.
4. Бонет Дж., Вуд Р. Д. Нелинейная механика сплошной среды для конечно-элементного анализа. 2-е изд. Кембридж: Cambridge University Press, 2008. 318 с. ISBN 978-0-521-83870-2.
5. Бунгард Дж., Ваккерфус Й. Схема исключения «ведущий-ведомый» для произвольных гладких нелинейных многоточечных ограничений // Вычислительная механика. 2024. Т. 74. С. 955–992. DOI: 10.1007/s00466-024-02463-7.
6. Вуд Р. Д., Зенкевич О. К. Геометрически нелинейный конечно-элементный анализ балок, рам, арок и осесимметричных оболочек // Компьютеры и конструкции. 1977. Т. 7, № 6. С. 725–735. DOI: 10.1016/0045-7949(77)90027-X.
7. Де Борст Р., Крисфилд М. А., Реммерс Дж. Дж. К., Верхусел К. В. Нелинейный конечно-элементный анализ твёрдых тел и конструкций. 2-е изд. Чичестер: John Wiley & Sons, 2012. 516 с. DOI: 10.1002/9781118375938.
8. Крисфилд М. А. Быстрая инкрементально-итерационная процедура решения, обрабатывающая прощёлкивание // Компьютеры и конструкции. 1981. Т. 13, № 1–3. С. 55–62. DOI: 10.1016/0045-7949(81)90108-5.
9. Курискис Дж. И., Валлиаппан С. Алгоритм решения линейных уравнений ограничений в конечно-элементном анализе // Компьютеры и конструкции. 1978. Т. 8, № 1. С. 117–124. DOI: 10.1016/0045-7949(78)90167-0.
10. Нараянасвами О. С. Обработка нелинейных многоточечных ограничений в методе конечных элементов // Международный журнал численных методов в инженерии. 1985. Т. 21, № 7. С. 1283–1288. DOI: 10.1002/nme.1620210708.
11. Риггерс П. Нелинейные методы конечных элементов. Берлин; Гейдельберг: Springer, 2008. 559 с. DOI: 10.1007/978-3-540-71001-1.
12. Рикс Э. Инкрементальный подход к решению задач хлопка и потери устойчивости // Международный журнал по механике твёрдого тела и конструкций. 1979. Т. 15, № 7. С. 529–551. DOI: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.

13. Симо Дж. К., Ву-Куок Л. Трёхмерная модель стержня с конечными деформациями. Часть II: Вычислительные аспекты // Компьютерные методы в прикладной механике и инженерии. 1986. Т. 58, № 1. С. 79–116. DOI: 10.1016/0045-7825(86)90079-4.
14. Чжан Яо, Цзяо Чиюй, Дун Цзюнь, Ли Гохуа, Ван Сюфан. Совершенствование и реализация функции «ведущий-ведомый» в методе конечных элементов на основе маркировки переменных // Инженерная механика. 2025. Ранний доступ. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2025.02.0063.
15. Эйнсворт М. Существенные граничные условия и многоточечные ограничения в конечно-элементном анализе // Компьютерные методы в прикладной механике и инженерии. 2001. Т. 190, № 48. С. 6323–6339. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00236-5.

Logical Analysis of the Finite Element Method Algorithm for Geometric Nonlinearity Based on the Variable Marking Method

Luo Zhen
Far Eastern Federal University

JEL classification: C10, C50, C60, C61, C80, C87, C90

Through linear discretization of constitutive relations, separation of elastic and plastic strains, definition of loading and unloading regimes, matrix update strategy, and contact treatment in material failure, the algorithmic logic of the variable marking method was improved. This allowed the general-purpose finite element software package ZQFEM to perform high-precision simulation of complex models, including models with material nonlinearity. The construction of the algorithmic logic and the analysis of test examples showed the following. When nodal coordinates are independent of structural deformation and displacement, engineering stress and engineering strain must be used to define the material constitutive relation curve. In modeling the loading history of linearly discretized nonlinear material constitutive relations, iterative methods such as Newton-Raphson reduce the variable-coefficient system of equations to an ordinary linear equation system. Compared with nodal failure, element failure is not recommended in modeling crack propagation, because numerical solutions such as strain have jump discontinuities. The research results show that the variable marking method is reliable in the field of material nonlinearity and can meet the simulation needs of constitutive relations for complex materials.

Keywords: material nonlinearity, variable marking method, softening and unloading, plastic hinge, crack propagation, ZQFEM.

References

1. Zhang Yao, Jiao Chiyu, Dong Jun, Li Guohua, Wang Xiufang. Improvement and implementation of master-slave function in finite element method based on variable marking // Engineering Mechanics. 2025. Early Access. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2025.02.0063.
2. Boungard J., Wackerfuß J. Master–slave elimination scheme for arbitrary smooth nonlinear multi-point constraints // Computational Mechanics. 2024. Vol. 74. P. 955–992. DOI: 10.1007/s00466-024-02463-7.
3. Abel J. F., Shephard M. S. An algorithm for multipoint constraints in finite element analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1979. Vol. 14, № 3. P. 464–467. DOI: 10.1002/nme.1620140312.
4. Curiskis J. I., Valliappan S. A solution algorithm for linear constraint equations in finite element analysis // Computers & Structures. 1978. Vol. 8, № 1. P. 117–124. DOI: 10.1016/0045-7949(78)90167-0.
5. Narayanaswamy O. S. Processing nonlinear multipoint constraints in the finite element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1985. Vol. 21, № 7. P. 1283–1288. DOI: 10.1002/nme.1620210708.
6. Ainsworth M. Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. Vol. 190, № 48. P. 6323–6339. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00236-5.
7. Wood R. D., Zienkiewicz O. C. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells // Computers & Structures. 1977. Vol. 7, № 6. P. 725–735. DOI: 10.1016/0045-7949(77)90027-X.
8. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // International Journal of Solids and Structures. 1979. Vol. 15, № 7. P. 529–551. DOI: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.
9. Crisfield M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through // Computers & Structures. 1981. Vol. 13, № 1–3. P. 55–62. DOI: 10.1016/0045-7949(81)90108-5.
10. Simo J. C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58, № 1. P. 79–116. DOI: 10.1016/0045-7825(86)90079-4.
11. Wriggers P. Nonlinear Finite Element Methods. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 559 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71001-1.
12. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 318 p. ISBN 978-0-521-83870-2.
13. De Borst R., Crisfield M. A., Remmers J. J. C., Verhoosel C. V. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. 516 p. DOI: 10.1002/9781118375938.
14. Belytschko T., Liu W. K., Moran B., Elkhodary K. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2014. 832 p. ISBN 978-1-118-63270-3.
15. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. 2nd ed. Watertown, MA: K. J. Bathe, 2014. 1043 p. ISBN 978-0-9790049-5-7.