Определение нормальных напряжений в балках при поперечном изгибе: сравнение формулы Навье и метода конечных элементов

Алферов Иван Валерьевич
к.т.н., доцент, Заведующий кафедрой «Строительная механика», Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ),

Эйдук Антон Борисович
студент, Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)

В работе проводится сравнительный анализ определения нормальных напряжений в балках при поперечном изгибе аналитическим методом (формула Навье) и методом конечных элементов (МКЭ). Исследование выполнено на примере статически определимых балок (шарнирно-опертая и консоль) прямоугольного поперечного сечения. Особое внимание уделено оценке влияния краевых эффектов в зонах опорных закреплений и приложения нагрузок на точность инженерных расчетов.
Ключевые слова: сопротивление материалов, поперечный изгиб, формула Навье, метод конечных элементов (МКЭ), нормальные напряжения, краевые эффекты.

Классические аналитические подходы сопротивления материалов опираются на ряд упрощающих допущений, включая гипотезу плоских сечений Бернулли и пренебрежение влиянием поперечных сил на нормальные напряжения [1, 2]. Данные допущения гарантируют высокую точность определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) стержневых конструкций в областях, находящихся на достаточном удалении от мест приложения сосредоточенных нагрузок и опорных закреплений. Тем не менее, вблизи зон концентрации нагрузок возникает значительная неравномерность распределения напряжений, вызванная локальными краевыми эффектами, корректное описание которых возможно исключительно в рамках общей теории упругости.

С развитием вычислительной техники метод конечных элементов (МКЭ) стал общепринятым стандартом инженерного анализа, обеспечивая возможность моделирования сложной геометрии и граничных условий с высокой степенью детализации [3]. В настоящем исследовании МКЭ применяется не только как самостоятельный инструмент расчёта, но также как средство верификации классических аналитических решений и количественной оценки пределов применимости формул сопротивления материалов.

В качестве расчётной схемы рассмотрены статически определимые балки с различными типами закрепления (консоль и шарнирно-опёртая).

Для всех рассмотренных примеров были приняты следующие геометрические параметры:

Форма сечения: прямоугольник.

Ширина сечения: b=2 см.

Высота сечения: h=10 см.

Длина балки: l=100 см.

Такое соотношение высоты к длине (h/l = 1/10) соответствует классической модели балки, где влияние поперечных деформаций относительно невелико, что позволяет ожидать хорошего совпадения результатов аналитического и численного методов.

Определение нормальных напряжений σ проводилось на основе классической формулы Навье для чистого изгиба [1]:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} * y \qquad (1)$$

M_x– изгибающий момент в сечении;

I_x– осевой момент инерции относительно нейтральной оси x;

y – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяется нормальное напряжение.

Для численного решения задачи применялся современный программный комплекс конечно-элементного анализа [3]. Моделирование балки осуществлялось с использованием пластинчатых конечных элементов, что позволяет корректно описать работу сечения как тонкостенной конструкции и получить детальное распределение напряжений по высоте и ширине.

Размер конечного элемента был принят равным 1 см. Такой шаг сетки обеспечивает необходимую плотность разбиения расчетной области (h = 10 см).

Напряжения при численном моделировании определялись в центрах конечных элементов. Для обеспечения сопоставимости результатов аналитическим методом напряжения вычислялись в точках, геометрически совпадающих с центрами соответствующих конечных элементов в выбранном поперечном сечении балки (рис. 1).

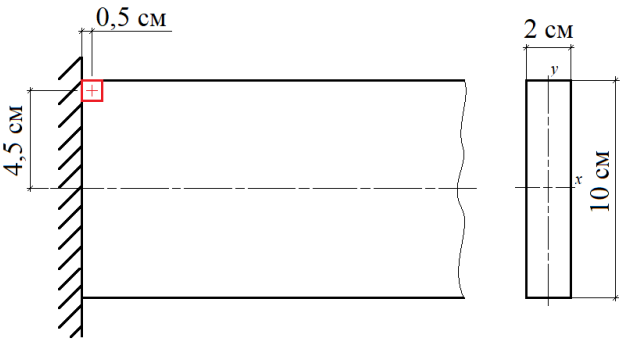


Рис. 1. К определению нормальных напряжений

Данный подход позволяет снизить погрешность интерполяции результатов МКЭ и выполнить прямое послойное сопоставление эпюр нормальных напряжений, полученных двумя независимыми методами. Это даёт возможность определить области, в которых упрощающие гипотезы сопротивления материалов приводят к отклонениям (например, вблизи опор или точек приложения сосредоточенных нагрузок), а также количественно оценить величину этих расхождений в процентах.

Для обеспечения корректного сравнения во всех расчётных схемах интенсивность внешней нагрузки нормировалась по критерию максимальных

нормальных напряжений. Величина нагрузки подбиралась таким образом, чтобы напряжение в центре крайнего конечного элемента, найденное аналитическим методом, составляло 2000 кг/см².

Пример 1. Рассмотрим консоль, загруженную сосредоточенной силой. Расчетная схема для аналитического решения показана на рис. 2. Расчетная схема по МКЭ показана на рис. 3.

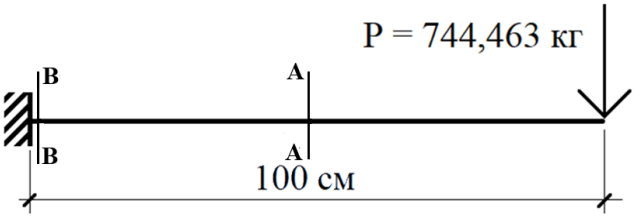


Рис. 2. К примеру 1. Расчетная схема

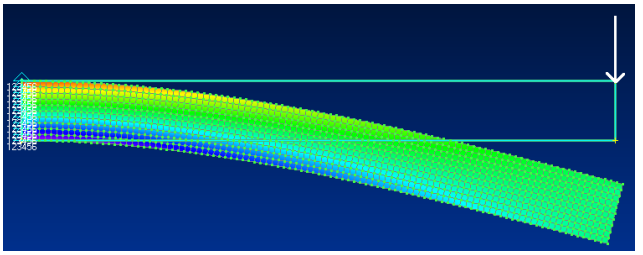


Рис. 3. К примеру 1. Расчетная схема. Пластинчатая модель

Все сечения балки испытывают поперечный изгиб. Нормальные напряжения были найдены по формуле (1) и численным методом (МКЭ) по высоте поперечных сечений, расположенных в середине балки и у заделки (сеч. А, сеч. В, рис. 2). Выбор среднего сечения (сеч. А) обусловлен необходимостью максимального исключения влияния краевых эффектов от опор и точек приложения внешних нагрузок. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 1.

Табл. 1
К примеру 1. Результат вычисления нормальных напряжений σ в сечении А

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитическое решение	МКЭ	
4,5	1015,075	1015,1	0,002
3,5	789,503	789,5	0,0004
2,5	563,931	563,93	0,0002
1,5	338,358	338,36	0,0006
0,5	112,786	112,79	0,004
-0,5	-112,786	-112,79	0,004
-1,5	-338,358	-338,36	0,0006
-2,5	-563,931	-563,93	0,0002
-3,5	-789,503	-789,5	0,0004
-4,5	-1015,075	-1015,1	0,002
Среднее расхождение, %			0,001

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения А (рис. 4).

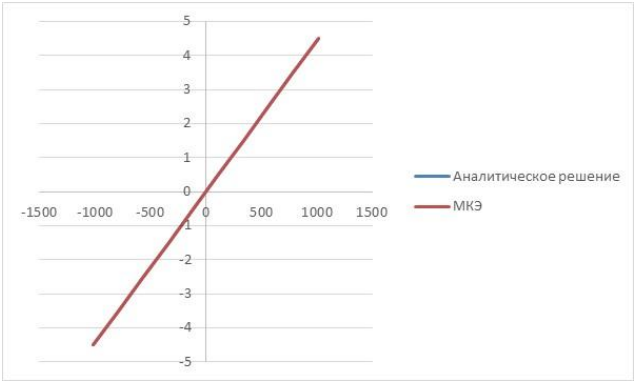


Рис. 4. К примеру 1. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения А, кг/см²

Далее были найдены нормальные напряжения σ по высоте сечения В (рис. 2). Выбор такого положения сечения обусловлен необходимостью оценки влияния краевых эффектов, возникающих в зоне опорного закрепления. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 2.

Табл. 2
К примеру 1. Результат вычисления нормальных напряжений σ в сечении В

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитическое решение	МКЭ	
4,5	2000	2083,9	4,195
3,5	1555,555	1499,7	3,591
2,5	1111,111	1058,2	4,762
1,5	666,666	629,0	5,644
0,5	222,222	209,1	5,896
-0,5	-222,222	-209,1	5,896
-1,5	-666,666	-629,0	5,644
-2,5	-1111,111	-1058,2	4,762
-3,5	-1555,555	-1499,7	3,591
-4,5	-2000	-2083,9	4,195
Среднее расхождение, %			4,818

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения В (рис. 5).

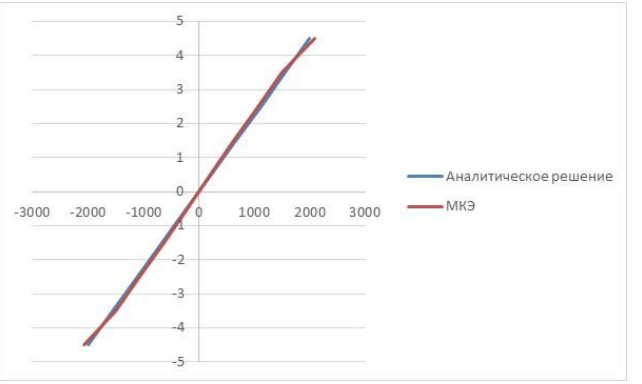


Рис. 5. К примеру 1. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения В, кг/см²

Пример 2. Рассмотрим шарнирно-опертую балку, загруженную сосредоточенной силой. Расчетная схема для аналитического решения показана на рис. 6. Расчетная схема по МКЭ показана на рис. 7.

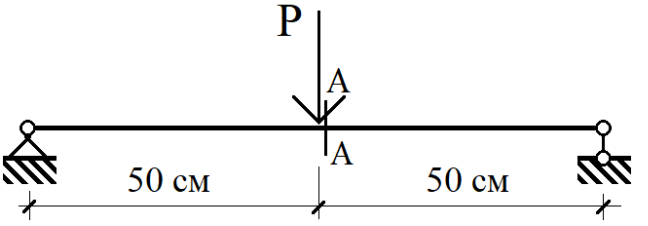


Рис. 6. К примеру 2. Расчетная схема

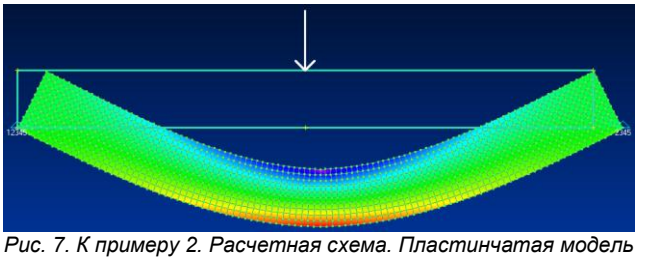


Рис. 7. К примеру 2. Расчетная схема. Пластинчатая модель

Как и в примере 1, все сечения балки находятся в состоянии поперечного изгиба. Напряжения σ были найдены в сечении, расположенном посередине пролета балки (сеч. А, рис. 6). Выбор такого положения сечения обусловлен необходимостью оценки влияния краевых эффектов, возникающих в зоне приложения сосредоточенной силы. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 3.

Табл. 3
К примеру 2. Результат вычисления нормальных напряжений σ в сечении А

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитическое решение	МКЭ	
4,5	2000	2251,1	12,555
3,5	1555,555	1439,0	7,493
2,5	1111,111	1012,8	8,848
1,5	666,666	586,7	11,995
0,5	222,222	172,4	22,420
-0,5	-222,222	-241,2	8,540
-1,5	-666,666	-657,5	1,375
-2,5	-1111,111	-1080,8	2,728
-3,5	-1555,555	-1515,5	2,575
-4,5	-2000	-1967,8	1,610
Среднее расхождение, %			8,014

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения А (рис. 8).

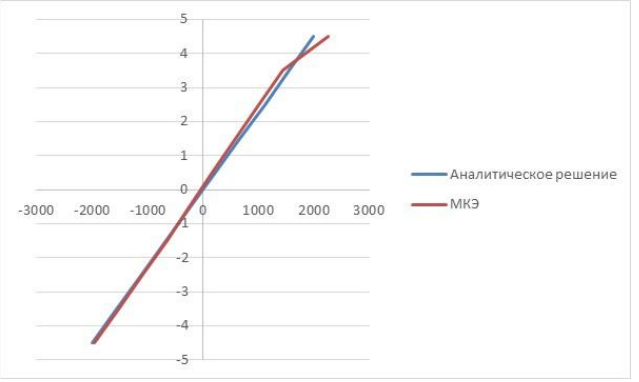


Рис. 8. К примеру 2. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения А, кг/см²

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при поперечном изгибе в сечениях, достаточно удаленных от опорных закреплений и зон приложения сосредоточенных сил, формула Навье обеспечивает высокую точность определения нормальных напряжений σ. Вблизи зон приложения нагрузок и опор наблюдается расхождение между аналитическим решением и результатами МКЭ, обусловленное локальным искажением эпюры нормальных напряжений. Это искажение связано с нарушением гипотезы плоских сечений, вызванным влиянием поперечных сил в указанных зонах (принцип Сен-Венана). В рассмотренных примерах максимальное среднее относительное расхождение составило 8,014 %. Сравнение аналитического решения проводилось с численным решением, полученным методом конечных элементов (МКЭ) с использованием пластинчатых конечных элементов.

Литература

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. В 2 частях. Ч. 1: учебник и практикум для вузов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2026. – 293 с.
2. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. В 2 частях. Ч. 2: учебник и практикум для вузов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2026. – 273 с.
3. Шимкович Д. Г. Практикум по инженерному анализу методом конечных элементов. Femap & NX Nastran. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 496 с.

Determination of Normal Stresses in Beams under Transverse Bending: Comparison of the Navier Formula and the Finite Element Method

Alferov I.V., Eiduk A.B.
Russian University of Transport

JEL classification: C10, C50, C60, C61, C80, C87, C90

This paper presents a comparative analysis of the determination of normal stresses in beams under transverse bending using an analytical method (the Navier formula) and the finite element method (FEM). The study is conducted on the example of statically determinate beams (simply supported and cantilever) with a rectangular cross-section. Special attention is paid to assessing the influence of edge effects in the zones of support fixities and load application on the accuracy of engineering calculations.

Keywords: strength of materials, transverse bending, Navier formula, finite element method (FEM), normal stresses, edge effects.

Refrences

1. Alexandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Strength of Materials. In 2 parts. Part 1: Textbook and practical guide for higher education institutions. – 9th ed., revised and expanded. – Moscow: Yurayt, 2026. – 293 p.
2. Alexandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Strength of Materials. In 2 parts. Part 2: Textbook and practical guide for higher education institutions. – 9th ed., revised and expanded. – Moscow: Yurayt, 2026. – 273 p.
3. Shimkovich D. G. Practical Guide to Engineering Analysis Using the Finite Element Method. Femap & NX Nastran. – Moscow: DMK Press, 2016. – 496 p.