Влияние высокоэнергетических мод на динамику гравитона в методе преодоления ультрафиолетовых расходимостей

Арефьев Александр Владимирович
канд. физ. – мат. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), aaref@yandex.ru,

Бородянский Юрий Михайлович
канд. техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, borodyanskyum@gmail.com,

Дагаев Александр Владимирович
канд. техн. наук, доцент, Ивангородский гуманитарно-технический институт (филиал) Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, adagaev@list.ru,

Курлов Виктор Валентинович
канд. техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), vitek543@rambler.ru,

Гулиев Рамиз Балахан оглы
канд. техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), ramiz63@yandex.ru

В настоящее время в мире теоретической физики обсуждается проблема неперенормируемой квантовой гравитации. Ранее предполагалось, что квантовая теория и гравитация связаны через энергии небольших колебаний от струн, которые, составляют частицы. Этот способ описания данной темы не имеет прямого доказательства, так как в настоящее время измерения не позволяют приблизиться к масштабам, меньше планковских. При попытке создания, используя функциональный интеграл ученные столкнулись с проблемой неперенормируемости. Проблему с инфракрасными расходимостями удалось решить с помощью дельта-функций Дирака. Далее возник вопрос об ультрафиолетовых расходимостях, которые появляются при вычислении интеграла по большим импульсам. При попытке вычисления интеграла возникает бесконечность, что не является удовлетворительным конечным решением. В настоящей статье представлен метод решения через нелокальный форм-фактор, выраженный через гауссовский регуляризатор и параметр ультрафиолетового обрезания. Представлены амплитуды и вероятности перехода гравитона. При вычислении получено конечное число.

Ключевые слова: гравитация, гравитон, частица, функциональный интеграл, действие, гауссовский регуляризатор, форм-фактор, амплитуда, вероятность.

Введение

Успехи квантовой теории поля в описании электромагнитного, сильного и слабого взаимодействий ставят актуальный вопрос о том, что гравитация до сих пор остаётся вне квантового представления. Гравитация должна передаваться от одного тела к другому импульсами, квантами энергии. Обращаясь к двум знаменитым теориям — Ньютона и Эйнштейна, можно сказать, что ни одна из них не подпадает под категорию квантов. Закон всемирного тяготения оперирует массами, но сама масса не обладает притягательными свойствами. Аналогичная ситуация с теорией относительности, она отождествляется с собственной массой тела, которое скатывается по склону искривленного пространства-времени, предоставленного другой, более тяжелой массой [1, 2]. Квантовую теорию принято связывать с теорией гравитации Эйнштейна.

Попытки применить стандартную процедуру квантования к эйнштейновской гравитации наталкиваются на серьёзную проблему: получающаяся теория оказывается неперенормируемой. Это означает, что на высоких энергиях предсказания теории теряют смысл из-за бесконечных расходимостей [3, 4]. Данная трудность не возникает в квантовой электродинамике или в теории электрослабых взаимодействий, где расходимости удаётся устранить конечным числом перенормировок. Гравитация же демонстрирует принципиально иное поведение — расходимости множатся на каждом порядке теории возмущений [5, 6].

Объединение двух теорий сводится к одной частице, называемую в дальнейшем гравитоном. Гравитон — гипотетическая безмассовая элементарная частица, предполагаемый переносчик гравитационного взаимодействия в рамках квантовой теории. Предполагается, что гравитон не будет обладать электрическим зарядом и его спин будет равен 2. По аналогии с фотоном, который является переносчиком электромагнетизма и имеющим спин 1, гравитон должен возникать при квантовании слабых гравитационных волн. Однако из-за чрезвычайной малости гравитационной константы прямая регистрация отдельных гравитонов в ближайшем будущем невозможна, и их статус остаётся гипотетическим.

Помимо гравитонов, существуют альтернативные подходы к квантованию гравитации, такие как теория струн, петлевая квантовая гравитация, но в данной статье основное внимание уделяется стандартному квантовополевому описанию и его ключевому недостатку — ультрафиолетовым расходимостям [7-10].

Цель работы: показать, что введение нелокального форм-фактора позволяет найти конечные амплитуды переходов с участием гравитонов.

Постановка задачи

Предложить метод преодоления ультрафиолетовых расходимостей, обусловленных влиянием высокоэнергичных мод на динамику гравитона.

Математический метод вероятности перехода гравитона

Для определения вероятности обнаружить частицу необходимо перейти к функциональному интегралу. При этом действие S можно определить двумя способами:

$$S = \int_{t1}^{t2} \hbar\omega dt \quad (1)$$

$$S = \int_{x1}^{x2} \hbar k dx \quad (2)$$

ω – угловая частота,

$\hbar$ – приведённая постоянная Планка,

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h - постоянная Планка.

k – волновое число,

$k = \frac{\omega}{c}$, с – скорость света.

Так как для определения положения частицы используется четырехмерный интеграл, в дальнейшем будет рассматриваться решение, исходя из формул (1) и (2). Тогда полное действие для волны в пространстве-времени:

$$S = \hbar(\omega\Delta t - k\Delta x) \quad (3)$$

Далее важно получить амплитуду перехода в четырехмерном пространстве.

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)} dx^3 \quad (4)$$

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i([\omega_2-\omega_1]t-[k_2-k_1]x)} dx^3 \quad (5)$$

Пределы интеграла обусловлены тем, что рассматриваются процессы, которые могут происходить в любой точке Вселенной и переход может произойти

в любой момент. Начало отсчёта времени не важно. В случае с бесконечностями, в которые упирается решение, нужно обратиться к дельта-функциям Дирака $\delta(x)$ [5]. Интегральное представление дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi\delta(\alpha) \quad (6)$$

Вычисление интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2-\omega_1)t} dt = 2\pi\delta(\omega_2-\omega_1) \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_2-k_1)x} dx = 2\pi\delta(k_2-k_1) \quad (8)$$

Соответственно, при интегрировании по осям y и z (8) перемножается три раза и получается:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_2-k_1)x} dx^3 = 8\pi^3\delta^3(k_2-k_1) \quad (9)$$

Амплитуда перехода:

$$\psi = 2\pi\delta(\omega_2-\omega_1)(2\pi)^3\delta^3(k_2-k_1) \quad (10)$$

$$\psi = (2\pi)^4\delta(\omega_2-\omega_1)\delta^3(k_2-k_1) \quad (11)$$

$$(2\pi)^4\delta(\omega_2-\omega_1)\delta^3(k_2-k_1) = (2\pi)^4\delta^4(k_2-k_1) \quad (12)$$

$$\psi = (2\pi)^4\delta^4(k_2-k_1) \quad (13)$$

При возведении амплитуды в квадрат получаем:

$$|\psi|^2 = [(2\pi)^4\delta^4(k_2-k_1)]^2 \quad (14)$$

По свойству дельта-функции Дирака её квадрат равен бесконечности [6]:

$$[\delta(x)]^2 = \delta(x)\cdot\delta(0) = \infty \quad (15)$$

Интегрируя по объему и времени, получаем:

$$\psi = \int_{T_2}^{T_2} dt \int_{V_1}^{V_2} e^{i[(\omega_2-\omega_1)t-(k_2-k_1)x]} dx^3 = VT(2\pi)^4\delta^4(k_2-k_1) \quad (16)$$

Для перехода в непрерывный спектр конечных состояний следует просуммировать по всем конечным состояниям. Плотность конечных состояний по импульсу:

$$d\rho = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (17)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (18)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{T_1}^{T_2} dt \int_{V_1}^{V_2} e^{i[(\omega_2-\omega_1)t-(k_2-k_1)x]} dx^3 \quad (19)$$

$$P = \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^4 TV\delta(\omega_1-\omega_1) = 2\pi TV\delta(0) \quad (20)$$

$\delta(0)$ — бесконечность, может интерпретироваться как полное время:

$$\delta(0) = \frac{T}{2\pi}$$

Для определения скорости перехода используется «золотое правило» Ферми [7]. Скорость перехода — это вероятность в единицу времени:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi|^2}{t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (21)$$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^4 V\delta(\omega_1-\omega_1)\delta^3(k_2-k_1)|M|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (22)$$

$$R = \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^4 V|M|^2\delta(\omega_1-\omega_1) = (2\pi)V|M|^2\delta(0) \quad (23)$$

$$R = 2\pi V|M|^2 \frac{1}{2\pi V} 2\pi\rho(E) = 2\pi V|M|^2\rho(E) \quad (24)$$

где $\rho(E) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(E)$ – плотность состояния по энергии.

M – матричный элемент, зависимый от импульсов.

Применение нелокального форм-фактора

При вычислении петлевых диаграмм возникают ультрафиолетовые расходимости. Эти расходимости связаны с поведением пропагаторов в области больших импульсов и обусловлены точечным характером взаимодействия. Для устранения ультрафиолетовых расходимостей предлагается модифицировать пропагаторы полей путём введения нелокального форм-фактора, экспоненциально убывающего в ультрафиолетовой области [8].

В интеграле по траекториям гауссовский регуляризатор вводится как дополнительный множитель под знаком функционального интеграла:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_2-k_1)x} e^{-x^2\lambda^2} dx^4 \quad (25)$$

λ– параметр ультрафиолетового обрезания по импульсу;

Вычисляя табличный интеграл по формуле, получаем [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-\alpha x^2} d^n x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{p^2}{4a}} \quad (26)$$

$$\psi = \frac{\pi^2}{\lambda^4} e^{-\frac{(k_2-k_1)^2}{4\lambda^2}} \quad (27)$$

Вероятность в пространстве при определенном переходе:

$$|\psi|^2 = \frac{\pi^4}{\lambda^8} e^{-\frac{(k_2-k_1)^2}{2\lambda^2}} \quad (28)$$

Однопетлевой интеграл принимает вид:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2}{\lambda^2}}}{k^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \quad (29)$$

что является конечным числом.

Суммируя все возможные конечные состояния получаем полную вероятность перехода:

$$P = \frac{\pi^4}{\lambda^8} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(k_2-k_1)^2}{2\lambda^2}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (30)$$

Теория показывает, что если пространство-время обладает минимальной длиной $l = 1/\lambda$; ($\lambda = 1/м$), то все ультрафиолетовые расходимости исчезают [10]. Вероятности переходов становятся конечными и могут быть вычислены явно. В отличие от стандартной неперенормируемой теории возмущений, где на каждом порядке возникают новые расходимости, предложенный метод с экспоненциальным регуляризатором обеспечивает конечность всех вероятностей перехода (28)–(30). Это позволяет вычислить вероятность гравитационных процессов и сделать предсказания, доступные экспериментальной проверке в планковском масштабе.

Заключение

В ходе теоретического исследования задачи неперенормируемой квантовой гравитации был рассмотрен метод преодоления инфракрасных расходимостей при помощи дельта-функций Дирака и «золотого правила» Ферми. Предложен метод преодоления ультрафиолетовых расходимостей, обусловленных влиянием высокоэнергичных мод на динамику гравитона. В основе метода лежит использование нелокального форм-фактора, который обеспечивает конечность амплитуд, и, как следствие, вероятностей переходов гравитона. Результат: конечное число при вычислении однопетлевого интеграла $\lambda^2/16\pi^2$.

Литература

1. Ершов, Г. Д. Как рождается гравитация – Москва: Издательские решения Ridero, 2019. – 435 с.
2. Волошин М.Б. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц / М.Б. Волошин, К.А. Тер-Мартиросян. – М.: URSS, 2023. – 296 с.
3. Amadei L., Perez A., Ribisi S. Landscape of polymer quantum cosmology // Physical Review D. – 2023. – Vol. 107, No. 8. – P. 086007. – DOI: 10.1103/PhysRevD.107.086007.
4. Branchina C., Branchina V., Contino F., Pernace A. Path integral measure and the cosmological constant // Physical Review D. – 2025. – Vol. 111, No. 10. – P. 105018. – DOI: 10.1103/PhysRevD.111.105018.
5. Павленко, А. Н. П 12 Дельта-функция Дирака и ее приложения: методические указания к выполнению домашних заданий и подготовке к контрольным работам / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 28 с.
6. Бельхеева, Р. К. Обобщенные функции в примерах и задачах: учебное пособие / Р. К. Бельхеева; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: РИЦ НГУ. – 2014. –85 с.
7. Парфенов П.С. Квантовая механика. Методическое пособие к практикуму по специальным разделам физики. – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 117 с.
8. Ferrero R., Han M., Liu H. One-loop effective action from the coherent state path integral of loop quantum gravity // Physical Review D. – 2025. – Vol. 112, No. 2. – P. 024033.
9. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с
10. Volkov S. Calculation of lepton magnetic moments in quantum electrodynamics: A justification of the flexible divergence elimination method // Physical Review D. – 2024. – Vol. 109, No. 3. – P. 036012. – DOI: 10.1103/physrevd.109.036012.

The influence of high-energy modes on the dynamics of the graviton in the method of overcoming ultraviolet divergences

Arefyev A.V., Borodyansky Yu.M., Dagaev A.V., Kurlov V.V., Guliyev R.B.O.

JEL classification: C10, C50, C60, C61, C80, C87, C90

Saint-Petersburg state university of aerospace instrumentation (GUAP), The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications, Ivangorodskii Humanitarian-Technical Institute (branch of) State educational institution for higher professional education «Saint-Petersburg University of Aerospace Instrumentation»

Currently, the problem of non-renormalizable quantum gravity is being discussed in the world of theoretical physics. Previously, it was assumed that quantum theory and gravity are related through the energies of small oscillations of strings that make up particles. This way of describing this topic has no direct proof, since at present measurements do not allow us to approach scales smaller than the Planck scale. When attempting to create a theory using a functional integral, scientists encountered the problem of non-renormalizability. The problem with infrared divergences was solved using Dirac delta functions. Next, the question arose about ultraviolet divergences, which appear when calculating the integral over large momenta. When attempting to calculate the integral, an infinity arises, which is not a satisfactory final solution. This article presents a method for solving the problem through a nonlocal form factor, expressed in terms of a Gaussian regulator and an ultraviolet cutoff parameter. The amplitudes and transition probabilities of the graviton are presented. The calculation yielded a final number.

Keywords: gravity, graviton, particle, functional integral, action, Gaussian regulator, form factor, amplitude, probability.

References

1. Ershov G. D. How Gravity Is Born – Moscow: Ridero Publishing Solutions. 2019. – 435 p.
2. Voloshin M.B. Theory of Gauge Interactions of Elementary Particles / M.B. Voloshin, K.A. Ter-Martirosyan. – Moscow: URSS, 2023. – 296 p.
3. Amadei L., Perez A., Ribisi S. Landscape of polymer quantum cosmology // Physical Review D. – 2023. – Vol. 107, No. 8. – P. 086007. – DOI: 10.1103/PhysRevD.107.086007.
4. Branchina C., Branchina V., Contino F., Pernace A. Path integral measure and the cosmological constant // Physical Review D. – 2025. – Vol. 111, No. 10. – P. 105018. – DOI: 10.1103/PhysRevD.111.105018.
5. Pavlenko, A. N. P 12 Dirac delta function and its applications: methodological guidelines for completing homework assignments and preparing for tests / A. N. Pavlenko, O. A. Pykhtilkova; Orenburg State University. – Orenburg: OSU, 2017. – 28 p.
6. Belkheeva, R. K. Generalized Functions in Examples and Problems: a textbook / R. K. Belkheeva; Novosibirsk State University. – Novosibirsk: RIC NSU. – 2014. – 85 p.
7. Parfenov P.S. Quantum Mechanics. A methodological guide to the workshop on special topics in physics. – St. Petersburg: ITMO University, 2018. – 117 p.
8. Ferrero R., Han M., Liu H. One-loop effective action from the coherent state path integral of loop quantum gravity // Physical Review D. – 2025. – Vol. 112, No. 2. – P. 024033.
9. Gradshtein, I. S. Tables of Integrals, Sums, Series, and Products / I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. – Moscow: Fizmatgiz, 1963. – 1100 p.
10. Volkov S. Calculation of lepton magnetic moments in quantum electrodynamics: A justification of the flexible divergence elimination method // Physical Review D. – 2024. – Vol. 109, No. 3. – P. 036012. – DOI: 10.1103/physrevd.109.036012.