Применение методов многокретериальной оптимизации и смешанно-целочисленного программирования для планирования инспекционного контроля на промышленных предприятиях

Костиневич Андрей Витальевич
студент, факультет вычислительной техники, Пензенский государственный университет, andreykoccc@gmail.com,

Костиневич Виталий Вячеславович
к.т.н., доцент кафедры «Техносферная безопасность», Пензенский государственный университет, kostinevich@mail.ru

Цель исследования заключается в оценке эффективности гибридной модели оптимального распределения инспекторов промышленной безопасности на основе метода анализа иерархий и смешанно-целочисленного линейного программирования. Для достижения поставленной цели проведены вычислительные эксперименты по оптимальному распределению инспекторов между пятью промышленными предприятиями с учетом уровня производственного риска, логистических издержек, квалификационного профиля и временных ограничений. Гипотеза исследования состоит в том, что интеграция весовых коэффициентов многокритериальной оценки в целевую функцию оптимизационной модели позволяет минимизировать совокупные издержки и квалификационные несоответствия при полном соблюдении нормативных ограничений. По результатам моделирования обеспечен 100 %-й охват объектов контроля с индексами стоимости назначений от 0,065 до 0,319 при полном соблюдении ограничений по рабочему времени инспекторов. Распределение инспекторов определялось совокупным влиянием уровня производственного риска, логистических затрат, специализации инспекторов и требований к специальным допускам, при этом ограничения по допускам исключали недопустимые назначения. Полученные результаты подтверждают выдвинутую гипотезу и свидетельствуют о применимости разработанного подхода для построения прототипов систем поддержки принятия решений в сфере контроля промышленной безопасности.

Ключевые слова: промышленная безопасность, инспекционный контроль, распределение ресурсов, метод анализа иерархий, смешанно-целочисленное линейное программирование, многокритериальная оптимизация, оценка производственного риска, система поддержки принятия решений.

Обеспечение высокого уровня промышленной безопасности и эффективный контроль соблюдения требований охраны труда остаются одними из ключевых задач современной промышленности. По мере усложнения структуры производственных комплексов и увеличения числа поднадзорных объектов традиционные подходы к распределению инспекторских ресурсов, основанные на экспертных оценках и регламентных процедурах, становятся менее эффективными, поскольку не всегда позволяют комплексно учитывать уровень производственного риска, логистические затраты, квалификацию инспекторов и ресурсные ограничения. В связи с этим возрастает актуальность применения риск-ориентированных методов распределения инспекторского состава, основанных на математическом моделировании.

Перспективным направлением решения данной задачи является использование систем поддержки принятия решений (СППР), объединяющих методы многокритериального анализа и математической оптимизации. Интеграция метода анализа иерархий (AHP) и смешанно-целочисленного линейного программирования (MILP) позволяет формализовать процесс распределения инспекторов между объектами контроля на основе совокупности критериев, включающих уровень производственного риска предприятий, логистические затраты, квалификационное соответствие инспекторов, требования к специальным допускам и ограничения по рабочему времени. Данный подход способствует снижению влияния субъективных решений и обеспечивает поиск оптимального распределения ресурсов при соблюдении ограничений модели [1, 2].

Для практической реализации предложенного подхода разработана гибридная математическая модель, объединяющая метод анализа иерархий и смешанно-целочисленное линейное программирование. Разработанная модель может использоваться в качестве расчетного ядра перспективных систем поддержки принятия решений, предназначенных для оптимизации распределения инспекторов в сфере промышленной безопасности [1, 3].

Метод анализа иерархий (AHP) представляет собой математический инструмент многокритериального принятия решений, предназначенный для формализации экспертных оценок и определения весовых коэффициентов сравниваемых критериев. В основе метода лежит построение квадратной обратно-симметричной матрицы парных сравнений, элементы которой отражают относительную важность рассматриваемых факторов. Вектор приоритетов определяется по главному собственному вектору матрицы парных сравнений, соответствующему максимальному собственному значению. Для последующих вычислений используется его вещественная часть, после чего выполняется нормализация путем деления каждого элемента на сумму всех компонент. В результате формируется нормированный вектор весовых коэффициентов критериев, используемый при построении целевой функции оптимизационной модели. Для оценки согласованности экспертных суждений рассчитываются индекс согласованности (Consistency Index, CI) и отношение согласованности (Consistency Ratio, CR), определяемое как отношение индекса согласованности к случайному индексу соответствующей размерности. Матрица парных сравнений считается согласованной при выполнении условия $CR<0{,}10$, что подтверждает допустимость использования полученных весовых коэффициентов в дальнейших процедурах оптимизации [1].

Смешанно-целочисленное линейное программирование представляет собой метод математической оптимизации, применяемый для решения задач дискретного выбора и распределения ресурсов при наличии линейной целевой функции и системы линейных ограничений. В рамках разрабатываемого подхода формируется множество бинарных переменных, отражающих факт назначения конкретного инспектора на соответствующий объект контроля. Коэффициенты целевой функции представляют собой скалярные индексы стоимости, рассчитываемые как взвешенная линейная комбинация предварительно нормализованных матриц частных критериев: логистических расходов, индексов квалификационного несоответствия, длительности проверок и трансформированных показателей производственного риска [2].

Система ограничений математической модели включает три ключевых блока. Во-первых, задаются линейные равенства, гарантирующие назначение ровно одного инспектора на каждый поднадзорный объект. Во-вторых, формулируются линейные неравенства, ограничивающие суммарную продолжительность назначенных проверок для каждого инспектора установленным лимитом рабочих дней. В-третьих, посредством задания жестких интервальных границ искомых переменных фиксируются нулевые значения для недопустимых комбинаций, блокируя назначение специалистов, не обладающих требуемым специальным допуском, на объекты, для которых наличие такого допуска является обязательным. Задача сводится к минимизации линейной целевой функции при соблюдении условий целочисленности искомых переменных, решение которой осуществляется с использованием оптимизационного решателя HiGHS, поддерживающего решение задач смешанно-целочисленного линейного программирования [2, 4].

Для проведения вычислительного эксперимента на основе данных программного комплекса сформирован тестовый сценарий, включающий три профильные группы инспекторов и пять поднадзорных промышленных предприятий.

Исходные параметры инспекционного состава заданы следующими характеристиками:

Инспектор_1: специализация – «Химия», лимит рабочего времени – 10 дней, специальный допуск – имеется;

Инспектор_2: специализация – «Электрика», лимит рабочего времени – 8 дней, специальный допуск – отсутствует;

Инспектор_3: специализация – «Стройка», лимит рабочего времени – 10 дней, специальный допуск – имеется.

Характеристики поднадзорных промышленных объектов включают следующий набор показателей [5]:

«ХимЗавод»: требуемый профиль – «Химия», уровень производственного риска – 9 из 10, продолжительность проверки – 5 дней, удаленность от базы – 120 км, обязательность специального допуска – да;

«Электросеть»: требуемый профиль – «Электрика», уровень производственного риска – 6 из 10, продолжительность проверки – 3 дня, удаленность от базы – 45 км, обязательность специального допуска – нет;

«СтройОбъект»: требуемый профиль – «Стройка», уровень производственного риска – 8 из 10, продолжительность проверки – 4 дня, удаленность от базы – 15 км, обязательность специального допуска – нет;

«Фабрика»: требуемый профиль – «Общий профиль», уровень производственного риска – 2 из 10, продолжительность проверки – 2 дня, удаленность от базы – 10 км, обязательность специального допуска – нет;

«НПЗ_Нефтехим»: требуемый профиль – «Нефтехим», уровень производственного риска – 10 из 10, продолжительность проверки – 5 дней, удаленность от базы – 210 км, обязательность специального допуска – да.

Степень соответствия квалификации оценивалась с помощью матрицы несоответствия специализаций: при точном совпадении профилей индекс равен 0,0; при частичном – 0,2; для объектов общего профиля – от 0,3 до 0,6; при полном расхождении – 0,7-1,0.

При расчете частного критерия логистических затрат учитывались расходы на топливо (10 руб./км в обе стороны), суточные выплаты (700 руб./день) и проживание в гостинице (3000 руб./сутки при удаленности объекта более 50 км).

Результаты работы оптимизационного алгоритма и итоговая загрузка инспекторов представлены на рисунке 1.

```
=== РЕЗУЛЬТАТЫ MILP ОПТИМИЗАЦИИ ===
Инспектор_1 (Химия)  --->  ХимЗавод | Индекс стоимости: 0.0992 | Дней: 5
Инспектор_1 (Химия)  --->  НПЗ_Нефтехим | Индекс стоимости: 0.1196 | Дней: 5
Инспектор_2 (Электрика)  --->  Электросеть | Индекс стоимости: 0.0945 | Дней: 3
Инспектор_3 (Стройка)  --->  СтройОбъект | Индекс стоимости: 0.0651 | Дней: 4
Инспектор_3 (Стройка)  --->  Фабрика | Индекс стоимости: 0.3194 | Дней: 2

=== ИТОГОВАЯ КАЛЕНДАРНАЯ ЗАГРУЗКА ИНСПЕКТОРОВ ===
Инспектор_1 (Химия): Задействовано 10 дн. из макс. лимита 10 дн. [СОБЛЮДЕНО]
Инспектор_2 (Электрика): Задействовано 3 дн. из макс. лимита 8 дн. [СОБЛЮДЕНО]
Инспектор_3 (Стройка): Задействовано 6 дн. из макс. лимита 10 дн. [СОБЛЮДЕНО]
```

Рисунок 1 - Результаты работы оптимизатора MILP и итоговая загрузка инспекторов

Анализ полученного решения позволяет выделить несколько характерных особенностей распределения ресурсов:

Приоритет объектов с высоким уровнем риска: Инспектор_1, обладающий специализацией «Химия» и необходимым специальным допуском, получил назначения на два объекта с наиболее высокими значениями показателя риска - «ХимЗавод» (9) и «НПЗ_Нефтехим» (10). Совокупная продолжительность назначенных проверок составила 10 дней, что соответствует установленному для него максимальному лимиту. Полученное распределение демонстрирует влияние трансформированного показателя риска на структуру оптимального решения.

Соблюдение требований к специальным допускам: Инспектор_2, не имеющий специального допуска, не может быть назначен на «ХимЗавод» и «НПЗ_Нефтехим», поскольку для данных объектов установлен соответствующий обязательный допуск. При этом его итоговая загрузка составила 3 из 8 доступных рабочих дней, поскольку остальные объекты либо имеют более высокую интегральную стоимость назначения для данного инспектора, либо оптимально распределяются между другими специалистами. Таким образом, модель обеспечивает соблюдение заданных требований к квалификационному допуску без введения искусственного ограничения на выравнивание загрузки инспекторов.

Наглядное представление сформированного пространства вариантов назначений обозначено на тепловой карте, приведенной на рисунке 2. Цветовая шкала отражает интегральный индекс стоимости назначения, рассчитанный на основе взвешенной комбинации нормализованных критериев, а маркеры выделяют назначения, вошедшие в оптимальное решение MILP.

Сопоставление выбранных назначений с матрицей стоимостных индексов позволяет раскрыть логику полученного многокритериального решения:

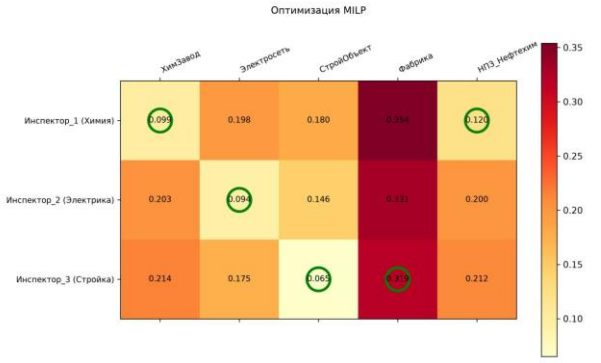


Рисунок 2 - Матрица интегральных индексов стоимости назначений и оптимальное распределение инспекторов

Выбор назначений с низкой интегральной стоимостью: В оптимальное решение вошли назначения с индексами 0,065, 0,094 и 0,099, соответствующие соответственно назначениям Инспектор_3 - «СтройОбъект», Инспектор_2 - «Электросеть» и Инспектор_1 - «ХимЗавод». Это свидетельствует о предпочтительности данных комбинаций с точки зрения совокупного значения учитываемых критериев.

Разрешение конфликта при назначении на «Фабрику»: наиболее высоким среди выбранных назначений является индекс 0,319 для комбинации Инспектор_3 - «Фабрика». Несмотря на сравнительно высокую интегральную стоимость, данное назначение включается в оптимальное решение с учетом всей системы ограничений и конкурирующих вариантов распределения ресурсов. В частности, Инспектор_1 полностью загружен проверками двух объектов с наиболее высокими значениями риска, а назначение Инспектора_2 на «Фабрику» характеризуется еще более высоким интегральным индексом стоимости - 0,331. Таким образом, выбор Инспектора_3 для «Фабрики» является результатом компромисса между частными критериями и ограничениями модели.

Полученные результаты показывают, что разработанная гибридная модель обеспечивает одновременный учет многокритериальных предпочтений и жестких ограничений при распределении инспекторских ресурсов. Все пять поднадзорных объектов получили по одному инспектору, при этом ограничения по продолжительности работ и специальные требования к допускам были полностью соблюдены. Следовательно, для заданного набора исходных данных модель формирует допустимое оптимальное распределение ресурсов, демонстрируя возможность ее использования в качестве расчетного механизма прототипа системы поддержки принятия решений в сфере контроля промышленной безопасности.

Таким образом, разработанная гибридная модель на основе метода анализа иерархий и смешанно-целочисленного линейного программирования доказала свою эффективность в решении задачи риск-ориентированного распределения инспекторов промышленной безопасности. Результаты вычислительного эксперимента полностью подтвердили гипотезу исследования: интеграция многокритериальных весовых коэффициентов в оптимизационный алгоритм позволила минимизировать совокупные издержки и квалификационные несоответствия при безупречном соблюдении всех нормативных ограничений и требований к допускам.

Сформированное математическое ядро создает основу для систем поддержки принятия решений, позволяя органам контроля и службам охраны труда перейти от субъективного планирования к прозрачному оптимизационному управлению ресурсами. Перспективы дальнейших исследований могут быть связаны с адаптацией модели к динамически изменяющимся производственным условиям и ее интеграцией с корпоративными базами данных управления рисками.

Литература

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Пер. с англ. – Р.Г. Вачнадзе – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. – 912 с.: ил. – Парал. тит. англ.

3. Аргучинцев А.В., Шеломенцева Н.Н. Методы принятия решений в многокритериальных задачах. – М.: Лань, 2026. – 84 с.

4. Хуторецкий А. Б., Горюшкин А. А. Математические модели и методы исследования операций. – М.: Лань, 2026. – 204 с.

5. Костиневич В.В. Охрана труда на предприятии. – Пенза, изд-во ПГУ, 2026. – 214 с.

Application of multi-criteria optimization and mixed-integer programming methods for planning inspection and control at industrial enterprises

Kostinevich A.V., Kostinevich V.V.
Penza State University

JEL classification: C01, C02, C1, C4, C5, C6, C8

The objective of the study is to evaluate the effectiveness of a hybrid model for the optimal allocation of industrial safety inspectors based on the Analytic Hierarchy Process and Mixed-Integer Linear Programming. To achieve this goal, computational

experiments were conducted on the optimal distribution of inspectors among five industrial enterprises, considering industrial risk levels, logistics costs, qualification profiles, and time constraints. The research hypothesis posits that integrating multi-criteria evaluation weights into the objective function of the optimization model minimizes total costs and qualification mismatches while fully complying with regulatory constraints. According to the modeling results, 100% coverage of inspection targets was achieved, with assignment cost indices ranging from 0.065 to 0.319, alongside full compliance with working time limits for inspectors. The allocation of inspectors was determined by the combined impact of industrial risk levels, logistics costs, inspector specializations, and security clearance requirements, with clearance constraints effectively eliminating infeasible assignments. The obtained results confirm the proposed hypothesis and demonstrate the applicability of the developed approach for building decision support system prototypes in the field of industrial safety control.

Keywords: industrial safety, inspection oversight, resource allocation, Analytic Hierarchy Process, Mixed-Integer Linear Programming, multi-criteria optimization, occupational risk assessment, decision support system.

References

1. Saaty T. Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. Trans. from English by R.G. Vachnadze. – Moscow: Radio i Svyaz, 1993. – 278 p.
2. Taha, Hamdy A. Operations Research: An Introduction, 7th Edition. Trans. from English. – Moscow: Williams Publishing House, 2005. – 912 p.: ill. – Parallel English title.
3. Arguchintsev A.V., Shelomentseva N.N. Decision-Making Methods for Multi-Criteria Problems. – Moscow: Lan, 2026. – 84 p.
4. Khutoretsky A.B., Goryushkin A.A. Mathematical Models and Methods in Operations Research. – Moscow: Lan, 2026. – 204 p.
5. Kostinevich V.V. Occupational Safety at the Enterprise. – Penza: PSU Publishing House, 2026. – 214 p.